ESERCITAZIONE n. 2

1. Dato il sistema di equazioni

$$\partial f / \partial x + a\, \partial g / \partial y = 0$$
$$\partial g / \partial x + a\, \partial f / \delta y = 0 \qquad \text{con } a = \text{cost}$$

- si verifichi che è un sistema riducibile (indicando tutte le ipotesi cui deve soddisfare)
- si scrivano le equazioni delle linee caratteristiche
- si scrivano le equazioni di compatibilità e le si rappresenti nel piano odografo
- si ricavino gli invarianti di Riemann

Il sistema è : lineare con coefficienti indipendenti da (x,y), omogeneo, 2x2. Pertanto, se è iperbolico, soddisfa tutte le ipotesi per essere riducibile.

$$A = \begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} \qquad \lambda^2 - a^2 = 0 \qquad \lambda = \pm a$$

Equazioni caratteristiche $\qquad dy/dx = \pm a$

$$[l_{i1}, l_{i2}] \begin{vmatrix} -\lambda & a \\ a & -\lambda \end{vmatrix} \qquad -l_{i1}\lambda + a\, l_{i2} = 0 \qquad l_{i1} = 1 \qquad l_{i2} = \pm 1$$

Equazioni compatibilità $\qquad df/dg = \pm 1 \quad$ (rette a 45°)

Invarianti di Riemann $\qquad f \pm g$

2. Per un flusso bidimensionale, stazionario ed isentropico di un fluido ideale si scrivano le equazioni di conservazione in termini delle variabili *u,v,p,ρ*. Si determinino quindi le equazioni delle linee caratteristiche.

$$u\rho_x + \rho u_x + v\,\rho_y + \rho v_y = 0$$
$$\rho u u_x + p_x + \rho v u_y = 0$$
$$\rho u v_x + \rho v v_y + p_y = 0$$
$$\rho u h_x - u p_x + \rho v h_y - v p_y = 0$$

$$dh = h\, dp/p - h\, d\rho/\rho$$
$$u(\rho h/p - 1)\, p_x - uh\, \rho_x + v(\rho h/p - 1)\, p_y - vh\, \rho_y = 0$$

$$\rho h/p - 1 = \gamma/(\gamma - 1) - 1 = 1/(\gamma - 1) \qquad h = a^2/(\gamma - 1)$$

$$u\, p_x - u\, a^2 \rho_x + v p_y - v\, a^2 \rho_y = 0$$

$$\begin{vmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{vmatrix} \qquad A_1 = \begin{vmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho u & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \rho u & 0 \\ -ua^2 & 0 & 0 & u \end{vmatrix} \qquad A_2 = \begin{vmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & \rho v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho v & 1 \\ -va^2 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$$

$$
\left| A_2 - \lambda A_1 \right| = \begin{vmatrix} v-\lambda u & -\lambda\rho & \rho & 0 \\ 0 & \rho(v-\lambda u) & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & \rho(v-\lambda u) & 1 \\ -a^2(v-\lambda u) & 0 & 0 & v-\lambda u \end{vmatrix} = 0
$$

$\rho^2 (v-\lambda u)^2 [(v-\lambda u)^2 - (\lambda^2+1) a^2] = 0$

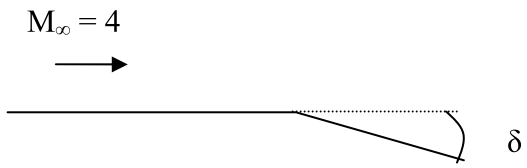
$(v-\lambda u)^2 = 0$ soluzione doppia $\lambda = v/u$

$dy/dx = v/u$ equazione della linea di corrente lungo cui si conservano entropia ed entalpia (flusso isentropico ed isentalpico)

$(u^2 - a^2) \lambda^2 - 2uv\lambda + (v^2 - a^2) = 0$

$dy/dx = 1/(u^2 - a^2) \; [uv \pm a^2 (M^2 - 1)^{1/2}]$

3. Determinare il massimo valore dell'angolo di deviazione δ per il quale il flusso in figura rimane attaccato alla parete.



$\theta + \omega(M_\infty) = \delta + \omega(\infty)$
$\delta = -130.45 + 65.78 = -64.67°$

4. Un ugello supersonico adattato, alimentato da un serbatoio nel quale si ha $p_0 = 10^6$ Pa, è progettato per avere M = 3 nella sezione di uscita. Determinare l'angolo di apertura del getto ed il massimo e minimo valore della pressione all'interno del getto quando la pressione nell'ambiente esterno è $p_e = 10^4$ Pa.

La pressione nella sezione di uscita è $p_u = 2.72 \times 10^4$ Pa. Poiché $p_e < p_u$ l'ugello è sottoespanso.

$p_e / p_0 = .01$ $\quad M_2 = 3.7$ $\quad \theta_2 = \omega(3.7) - \omega(3) = 11.84°$

$\theta_2 + \omega(M_2) = \theta_3 + \omega(M_3)$ $\quad \theta_3 = 0$ $\quad \omega(M_3) = 73.44$ $\quad M_3 = 4.65$ $\quad p_3 = .287 \times 10^4$ Pa
$p_{min} = p_3 = .287 \times 10^4$ Pa
$p_{max} = p_u = 2.72 \times 10^4$ Pa